ODE Lekce 7

neděle 6. prosince 2020 13:48

Nalezení partikulárního řešení nehomogenní soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}$ metodou variace konstant

Je-li $\mathbb{A} \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$ a $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n$ jsou lineárně nezávislá řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\cdot\mathbf{y}$, pak pokud položíme

$$\mathbb{Y} = (\mathbf{y}^1 \cdots \mathbf{y}^n),$$

potom lze psát:

$$\boxed{\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\cdot\mathbb{Y}.}$$

Matici $\mathbb{Y}(x) = (\mathbf{y}^1(x) \cdots \mathbf{y}^n(x))$ budeme nazývat fundamentální maticí.

Obecné řešení $\mathbf{y}(x)$ má pak tvar:

$$\mathbf{y}(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\mathbf{y}^1(x) + \dots + c_n\cdot\mathbf{y}^n(x).$$

Partikulární řešení nehomogenní soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{f}$

$\mathbf{y}_p$ budeme hledat ve tvaru:

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\underline{u}(x) =$$
$$= \mathbf{y}^1(x)\cdot u_1(x) + \mathbf{y}^2(x)\cdot u_2(x) + \dots + \mathbf{y}^n(x)\cdot u_n(x),$$

kde $\underline{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce. Dosazením $\mathbf{y}_p$ do soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{f}$ dostaneme:

$$\mathbb{Y}(x)\cdot\underline{u}'(x) + \mathbb{Y}'(x)\cdot\underline{u}(x) = \mathbb{A}\cdot\mathbb{Y}(x)\cdot\underline{u}(x) + \mathbf{f}(x)$$
$$\mathbb{Y}(x)\cdot\underline{u}'(x) + \cancel{\mathbb{A}\cdot\mathbb{Y}(x)\cdot\underline{u}(x)} = \cancel{\mathbb{A}\cdot\mathbb{Y}(x)\cdot\underline{u}(x)} + \mathbf{f}(x)$$
$$\mathbb{Y}(x)\cdot\underline{u}'(x) = \mathbf{f}(x)$$
$$\underline{u}'(x) = \mathbb{Y}^{-1}(x)\cdot\mathbf{f}(x)$$
$$\underline{u}(x) = \int \mathbb{Y}^{-1}(x)\cdot\mathbf{f}(x)\,dx.$$

Tedy

$$\boxed{\mathbf{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\int\mathbb{Y}^{-1}(x)\cdot\mathbf{f}(x)\,dx.} \qquad (1)$$

Příklad.

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x-2 \\ -4x \end{pmatrix}$$

$$p_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)+3$$
$$= 5 - \lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

Vlastní čísla: $\lambda_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

$\mathcal{E}_2(\mathbb{A})$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 2v_1 \\ -3v_1 + 5v_2 &= 2v_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0 \\ -3v_1 + 3v_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad v_1 = 1 \Rightarrow v_2 = 1$$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_2(\mathbb{A})$.

$\mathcal{E}_4(\mathbb{A}) \ni \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 4v_1 \\ -3v_1 + 5v_2 &= 4v_2 \end{aligned}\right\}$

$$-3v_1 + v_2 = 0$$
$$-3v_1 + v_2 = 0$$

Položme $v_1 = 1$, pak $v_2 = 3$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Obecné řešení homogenní soustavy je:

$$\mathbf{y}(x) = c_1\cdot e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\cdot e^{4x}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} e^{4x} \\ 3e^{4x} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ e^{2x} & 3e^{4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \mathbb{Y}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ e^{2x} & 3e^{4x} \end{pmatrix} \in Mat(2\times 2, \mathbb{R}).$$

Inverzní matici k regulární matici 2×2 spočteme snadno podle vzorce:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Tedy

$$\mathbb{Y}^{-1}(x) = \frac{1}{3e^{6x}-e^{6x}}\begin{pmatrix} 3e^{4x} & -e^{4x} \\ -e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^{-6x}\begin{pmatrix} 3e^{4x} & -e^{4x} \\ -e^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbb{Y}^{-1}(x)\cdot\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-2x} & -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ -\frac{1}{2}e^{-4x} & \frac{1}{2}e^{-4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x-2 \\ -4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5xe^{-2x} - 3e^{-2x} \\ -3xe^{-4x} + e^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Užitím vzorce (1) dostaneme:

$$\mathbf{y}_p(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ e^{2x} & 3e^{4x} \end{pmatrix}\int\begin{pmatrix} 5xe^{-2x} - 3e^{-2x} \\ -3xe^{-4x} + e^{-4x} \end{pmatrix}dx =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ e^{2x} & 3e^{4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} \\ \frac{3}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}x + \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

VĚTA. Uvažujme soustavu $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{f}$ a nechť $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n$ tvoří bázi prostoru všech řešení soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\cdot\mathbf{y}$, $\mathbb{A} \in Mat(n\times n)$. Je-li $\mathbf{y}_p$ jakékoli partikulární řešení nehom. soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{f}$, pak má obecné řešení nehom. soustavy $\mathbf{y}' = \mathbb{A}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{f}$ tvar:

$$\boxed{\mathbf{y}' = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}^1 + \dots + c_n\cdot\mathbf{y}^n,}$$ kde $c_1, \dots, c_n$ jsou lib. konstanty.

Pokud navážeme na předchozí příklad, tak podle této věty má obecné řešení soustavy $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x-2 \\ -4x \end{pmatrix}$

tvar:

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}x + \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{16} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ e^{2x} & 3e^{4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$